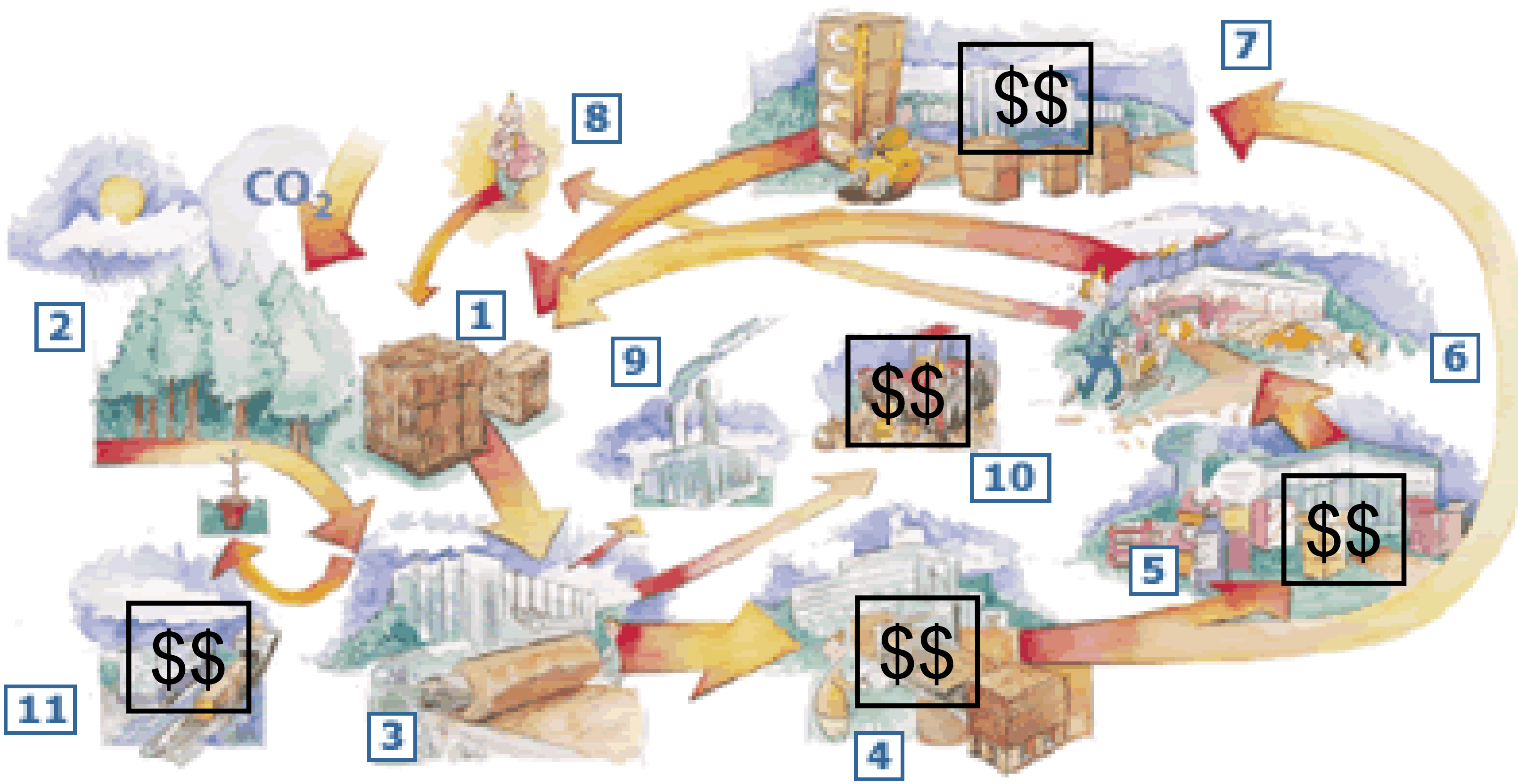
Методы Оптимизации

Постановка Задачи

Для системы, определенной на поле параметров, найти такое значение всех или части параметров, когда мера этой системы, посчитанная на том же или суженом поле параметров, достигает максимального или минимального значения.

Задача оптимизации поставок

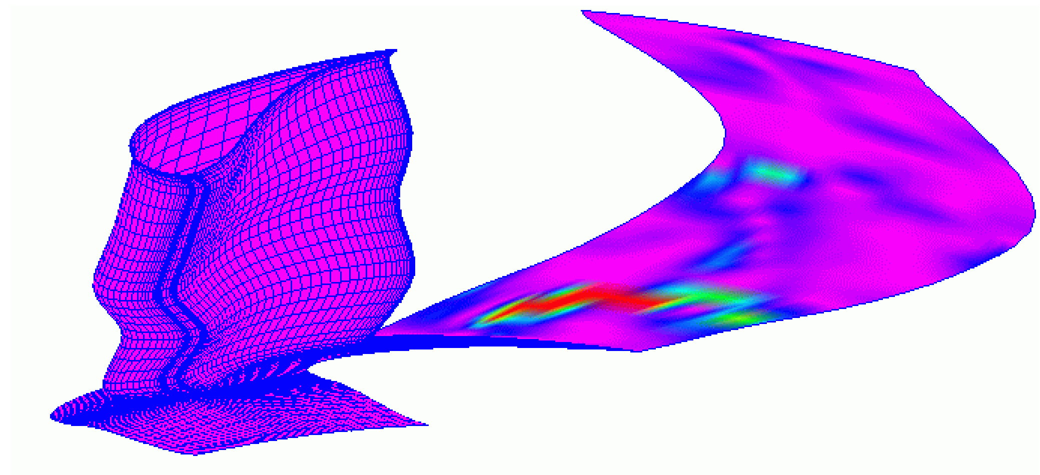
Минимизировать затраты на доставку материалов, при максимальном удовлетворении запросов.



Оптимизация в Управлении

Задача управления объектами для их оптимальных совместных действий

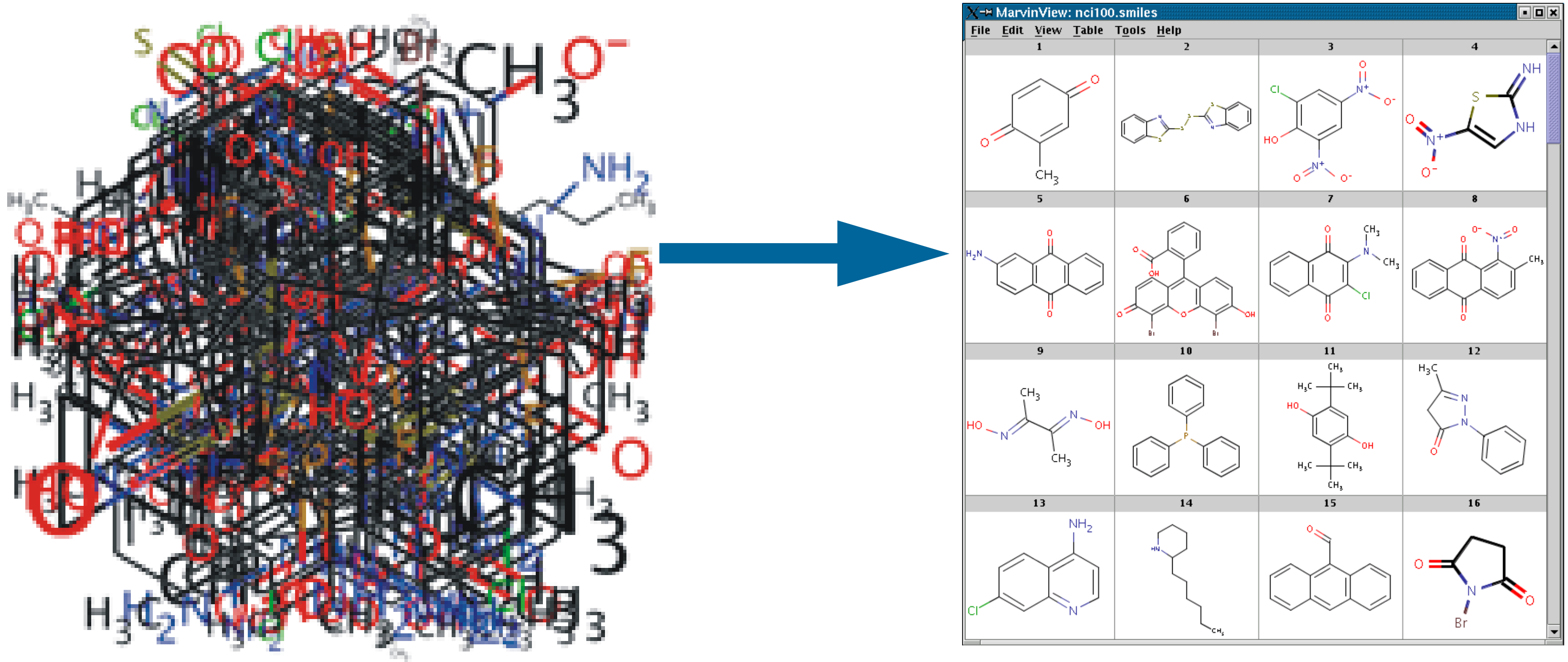
Оптимизация в Инженерии



- Минимизация веса при сохранении прочностных характеристик деталей и конструкций
- Нахождение оптимальных форм (например, для снижения сопротивления воздуха)
- Расчет устойчивости конструкций (мосты, здания, дороги)

Оптимизация в Биохимии

Расчет форм и структур молекул, ДНК, химических и биохимических соединений



Оптимизационная Задача

Постановка оптимизационной задачи

- Оптимизационный функционал как совокупность оптимизационных функций

$$f_i(x_i) = \sum_{k=0}^{\ell} b_i^k \|(x_{pos_i}(k) - x_{pos_i}^{des}(k), y_{pos_i}(k) - y_{pos_i}^{des}(k))\|_2^2$$

- Параметры оптимизации
- Ограничения

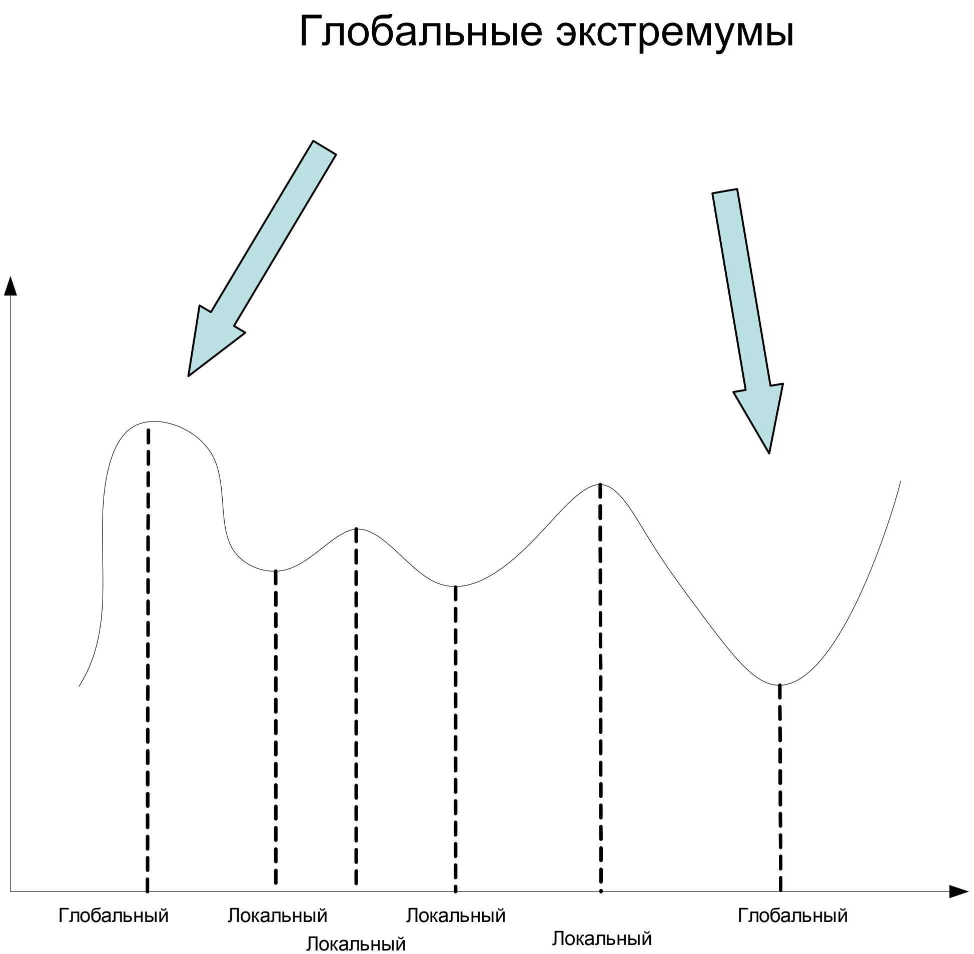
$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \quad f_i(x_i)$$

$$\textit{subject to} \quad \begin{cases} g_i(x_i|\{x_j\}_i) \begin{cases} g_{l_i}(x_i) \leq 0 \\ g_{g_i}(x_i|\{x_j\}_i) \leq 0 \end{cases} \\ h_i(x_i|\{x_j\}_i) \begin{cases} h_{l_i}(x_i) = 0 \\ h_{g_i}(x_i|\{x_j\}_i) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Локальные и Глобальные

Оптимизация может быть:

- Локальной, т.е. вблизи заданного начального значения параметров
- Глобальной, т.е. не зависящий от начального значения параметров



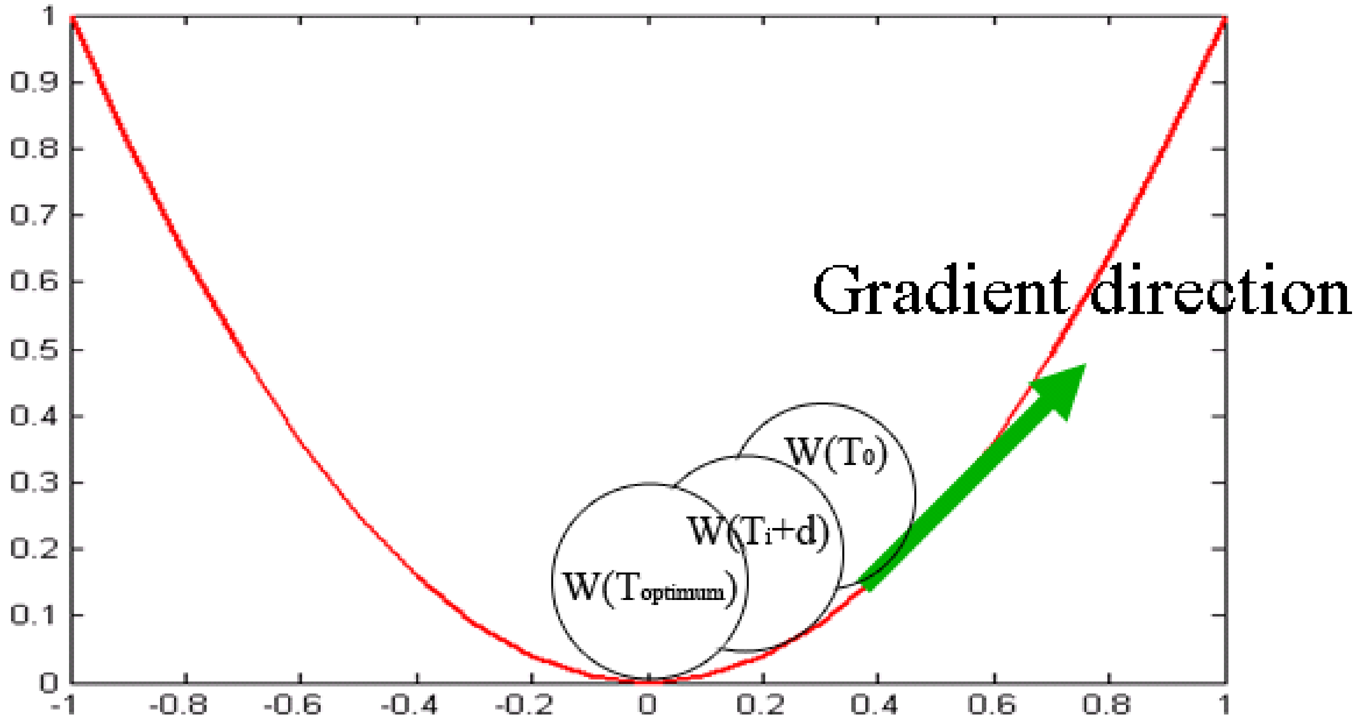
Методы Оптимизации

Метод градиентного или направленного спуска

- Быстрая сходимость
- Высокая точность оптимизации
- Сходится к локальному оптимуму
- Неустойчив при наличии нескольких близких оптимумов
- Неустойчив при большом количестве параметров

Методы Оптимизации

Метод градиентного или направленного спуска



Линейное программирование

- Функционал представляет собой линейную комбинацию взаимно компенсирующих функций, определенных на линейном пространстве параметров:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_n \\
\text{all } x_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Существуют обобщения метода позволяющее оптимизировать также нелинейные функции.

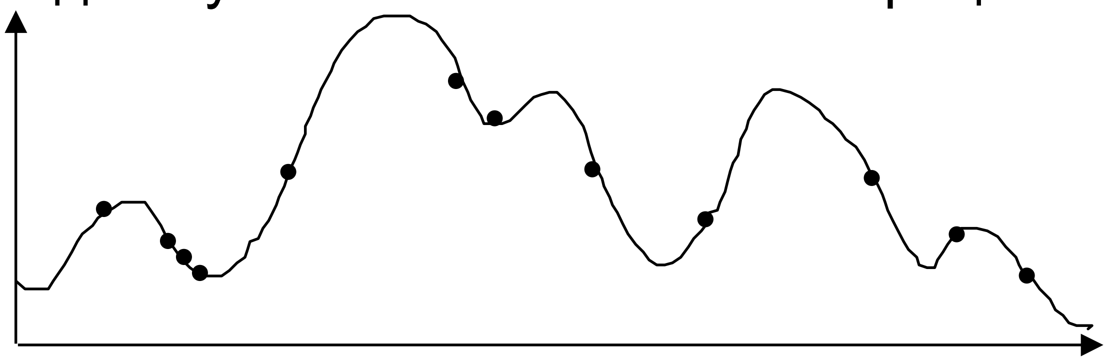
Методы Оптимизации

Вероятностные методы

- Функция вычисляется в большом количестве произвольных N-мерных точек
- Текущее значение движется к оптимуму если вероятность перехода к оптимальному значению ниже предела Больцмана для свободного газа:

$$P(T) \sim \exp(-\Delta E / T)$$

- Процесс сходится к глобальному оптимуму, однако абсолютно точный оптимум может быть достигнут только за непредсказуемо большое число итераций

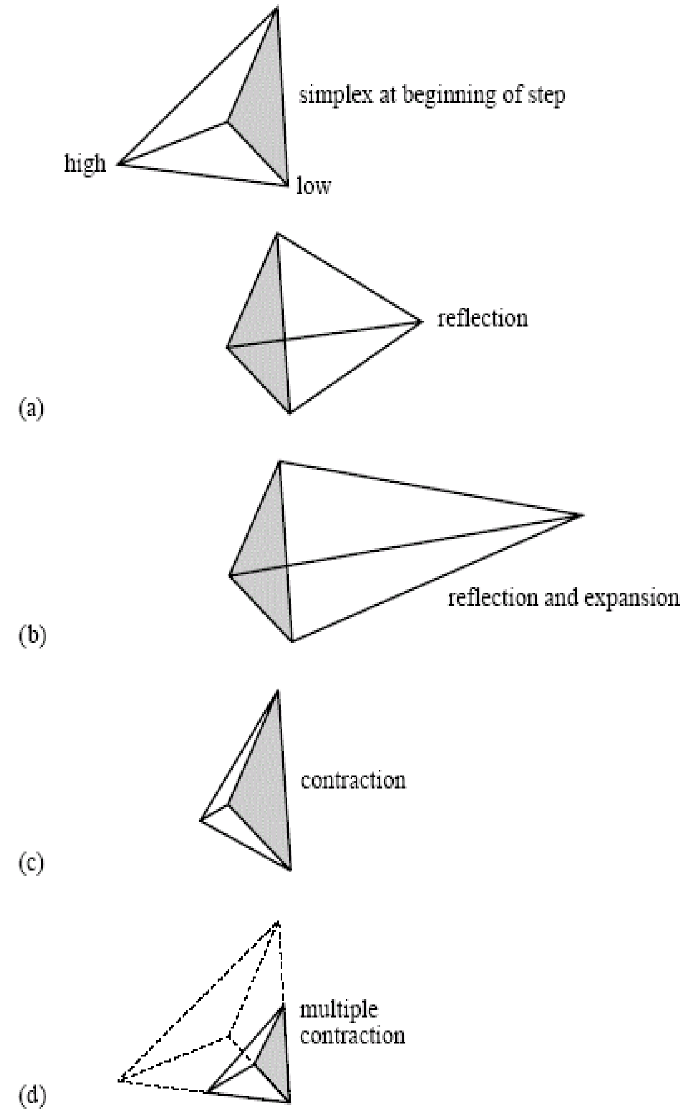


Методы Оптимизации

Симплех Метод

- Сложно или невозможно посчитать производные
- Симплех – (N+1)-мерная пирамида,

  где N – количество параметров
- Итерационный “амебаобразный” процесс : отражение, расширение, сокращение, многостороннее сокращение; каждый шаг приближает одну из вершин к оптимуму
- Требует многократного вычисления функционала



Заключение

- Выбор правильного алгоритма и параметров влияет на скорость сходимости процесса и на точность
- Выбор правильного алгоритма зависит от конкретной задачи
- Рекомендуется, когда это возможно, использовать комбинацию алгоритмов для более точного и быстрого нахождения оптимума